# Duhová souvislost v grafech

Přemek Holub

Katedra matematiky, Centrum Excelence - Institut teoretické informatiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

DiMaS, Ostrava, 18.4.2013

# Duhová souvislost

# Základní definice a značení

- graph $G = (V, E)$ ... prostý, neorientovaný
- průměr diam$(G)$ ... $\max\limits_{x,y \in V(G)} \{\mathrm{dist}(x, y)\}$
- poloměr $r(G)$ ... $\min\limits_{x \in V(G)} \max\limits_{y \in V(G)} \mathrm{dist}_G(x, y)$
- hranové obarvení ... zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$ s nějakou dodatečnou podmínkou, (klasické hranové obarvení - hrany se společným vrcholem musí mít různé barvy)
- $G$ je $k$-souvislý, jestliže $G - \{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}\}$ je souvislý pro každou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \subset V(G)$

# Základní definice a značení

- graph $G = (V, E)$ . . . prostý, neorientovaný
- průměr $\mathrm{diam}(G)$ . . . $\max\limits_{x,y \in V(G)} \{\mathrm{dist}(x, y)\}$
- poloměr $r(G)$ . . . $\min\limits_{x \in V(G)} \max\limits_{y \in V(G)} \mathrm{dist}_G(x, y)$
- hranové obarvení . . . zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$ s nějakou dodatečnou podmínkou, (klasické hranové obarvení - hrany se společným vrcholem musí mít různé barvy)
- $G$ je $k$-souvislý, jestliže $G - \{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}\}$ je souvislý pro každou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \subset V(G)$

# Základní definice a značení

- graph $G = (V, E)$ ... prostý, neorientovaný
- průměr $\mathrm{diam}(G) \ldots \max_{x,y \in V(G)} \{\mathrm{dist}(x, y)\}$
- poloměr $r(G) \ldots \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} \mathrm{dist}_G(x, y)$
- hranové obarvení ... zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$ s nějakou dodatečnou podmínkou, (klasické hranové obarvení - hrany se společným vrcholem musí mít různé barvy)
- $G$ je $k$-souvislý, jestliže $G - \{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}\}$ je souvislý pro každou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \subset V(G)$

# Základní definice a značení

- graph $G = (V, E)$ ... prostý, neorientovaný
- průměr $\mathrm{diam}(G) \ldots \max\limits_{x,y \in V(G)} \{\mathrm{dist}(x, y)\}$
- poloměr $r(G) \ldots \min\limits_{x \in V(G)} \max\limits_{y \in V(G)} \mathrm{dist}_G(x, y)$
- hranové obarvení ... zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$ s nějakou dodatečnou podmínkou, (klasické hranové obarvení - hrany se společným vrcholem musí mít různé barvy)
- $G$ je $k$-souvislý, jestliže $G - \{x_1, x_2, \ldots x_{k-1}\}$ je souvislý pro každou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \subset V(G)$

# Základní definice a značení

- graph $G = (V, E)$ ... prostý, neorientovaný
- průměr diam$(G)$ ... $\max\limits_{x,y \in V(G)} \{\mathrm{dist}(x, y)\}$
- poloměr $r(G)$ ... $\min\limits_{x \in V(G)} \max\limits_{y \in V(G)} \mathrm{dist}_G(x, y)$
- hranové obarvení ... zobrazení $f : E(G) \to \mathbb{N}$ s nějakou dodatečnou podmínkou, (klasické hranové obarvení - hrany se společným vrcholem musí mít různé barvy)
- $G$ je $k$-souvislý, jestliže $G - \{x_1, x_2, \dots x_{k-1}\}$ je souvislý pro každou množinu $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\} \subset V(G)$

# Základní definice a značení

- $a, b$-cesta ... cesta v grafu s koncovými vrcholy $a, b$
- sudá/lichá cesta ... sudý/lichý počet hran
- $H$-cesta $P$ ... daný podgraf $H$ grafu $G$, oba koncové vrcholy cesty $P$ leží v $H$, vnitřní vrcholy $P$ leží mimo $H$

# Základní definice a značení

- $a, b$-cesta . . . cesta v grafu s koncovými vrcholy $a, b$
- sudá/lichá cesta . . . sudý/lichý počet hran
- $H$-cesta $P$ . . . daný podgraf $H$ grafu $G$, oba koncové vrcholy cesty $P$ leží v $H$, vnitřní vrcholy $P$ leží mimo $H$

# Základní definice a značení

- $a, b$-cesta ... cesta v grafu s koncovými vrcholy $a, b$
- sudá/lichá cesta ... sudý/lichý počet hran
- $H$-cesta $P$ ... daný podgraf $H$ grafu $G$, oba koncové vrcholy cesty $P$ leží v $H$, vnitřní vrcholy $P$ leží mimo $H$

# Duhová souvislost - definice

- motivace - bezpečný přenos utajených informací mezi zpravodajskými agenturami; posílání zpráv mezi uzly komunikační sítě, každá hrana cesty má odlišnou frekvenci (kanál, šifru, ...)
- duhová cesta ... cesta, jejíž hrany mají navzájem různé barvy
- $G$ je duhově souvislý, jestliže, pro dané hranové obarvení $G$ (sousední hrany mohou mít stejné barvy), existuje duhová cesta mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu $G$
- duhová souvislost grafu $rc(G)$ ... nejmenší počet barev $k$ potřebných k tomu, aby daný graf $G$ byl duhově souvislý
- První zmínka - Chartrand a spol. v Math. Bohemica (2008)

# Duhová souvislost - definice

- motivace - bezpečný přenos utajených informací mezi zpravodajskými agenturami; posílání zpráv mezi uzly komunikační sítě, každá hrana cesty má odlišnou frekvenci (kanál, šifru, ...)
- duhová cesta ... cesta, jejíž hrany mají navzájem různé barvy
- $G$ je duhově souvislý, jestliže, pro dané hranové obarvení $G$ (sousední hrany mohou mít stejné barvy), existuje duhová cesta mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu $G$
- duhová souvislost grafu $rc(G)$ ... nejmenší počet barev $k$ potřebných k tomu, aby daný graf $G$ byl duhově souvislý
- První zmínka - Chartrand a spol. v Math. Bohemica (2008)

# Duhová souvislost - definice

- motivace - bezpečný přenos utajených informací mezi zpravodajskými agenturami; posílání zpráv mezi uzly komunikační sítě, každá hrana cesty má odlišnou frekvenci (kanál, šifru, ...)
- duhová cesta ... cesta, jejíž hrany mají navzájem různé barvy
- $G$ je duhově souvislý, jestliže, pro dané hranové obarvení $G$ (sousední hrany mohou mít stejné barvy), existuje duhová cesta mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu $G$
- duhová souvislost grafu $rc(G)$ ... nejmenší počet barev $k$ potřebných k tomu, aby daný graf $G$ byl duhově souvislý
- První zmínka - Chartrand a spol. v Math. Bohemica (2008)

# Duhová souvislost - definice

- motivace - bezpečný přenos utajených informací mezi zpravodajskými agenturami; posílání zpráv mezi uzly komunikační sítě, každá hrana cesty má odlišnou frekvenci (kanál, šifru, ...)
- duhová cesta ... cesta, jejíž hrany mají navzájem různé barvy
- $G$ je duhově souvislý, jestliže, pro dané hranové obarvení $G$ (sousední hrany mohou mít stejné barvy), existuje duhová cesta mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu $G$
- duhová souvislost grafu $rc(G)$ ... nejmenší počet barev $k$ potřebných k tomu, aby daný graf $G$ byl duhově souvislý
- První zmínka - Chartrand a spol. v Math. Bohemica (2008)

## Duhová souvislost - definice

- motivace - bezpečný přenos utajených informací mezi zpravodajskými agenturami; posílání zpráv mezi uzly komunikační sítě, každá hrana cesty má odlišnou frekvenci (kanál, šifru, ...)
- duhová cesta ... cesta, jejíž hrany mají navzájem různé barvy
- $G$ je duhově souvislý, jestliže, pro dané hranové obarvení $G$ (sousední hrany mohou mít stejné barvy), existuje duhová cesta mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu $G$
- duhová souvislost grafu $rc(G)$ ... nejmenší počet barev $k$ potřebných k tomu, aby daný graf $G$ byl duhově souvislý
- První zmínka - Chartrand a spol. v Math. Bohemica (2008)

# Základní výsledky

- $rc(G) \geq \mathrm{diam}(G)$
- $rc(G) = |V(G)| - 1$ právě když $G$ je strom
- z předchozího: $\mathrm{diam}(G) \leq rc(G) \leq |V(G)| - 1$
- $rc(G) = 1$ právě když $G$ je úplný ($\mathrm{diam}(G) = 1$)

# Základní výsledky

- $rc(G) \geq \mathrm{diam}(G)$
- $rc(G) = |V(G)| - 1$ právě když $G$ je strom
- z předchozího: $\mathrm{diam}(G) \leq rc(G) \leq |V(G)| - 1$
- $rc(G) = 1$ právě když $G$ je úplný ($\mathrm{diam}(G) = 1$)

# Základní výsledky

- $rc(G) \geq \text{diam}(G)$
- $rc(G) = |V(G)| - 1$ právě když $G$ je strom
- z předchozího: $\text{diam}(G) \leq rc(G) \leq |V(G)| - 1$
- $rc(G) = 1$ právě když $G$ je úplný ($\text{diam}(G) = 1$)

# Základní výsledky

- $rc(G) \geq \mathrm{diam}(G)$
- $rc(G) = |V(G)| - 1$ právě když $G$ je strom
- z předchozího: $\mathrm{diam}(G) \leq rc(G) \leq |V(G)| - 1$
- $rc(G) = 1$ právě když $G$ je úplný ($\mathrm{diam}(G) = 1$)

# Základní výsledky

- $rc(C_k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$
- $rc(W_n) = \begin{cases} 1 \ldots n = 3 \\ 2 \ldots 4 \leq n \leq 6 \\ 3 \ldots n \geq 7 \end{cases}$
- $rc(K_{s,t}) = \min\{4, \lceil \sqrt[s]{t} \rceil\}$ pro $2 \leq s \leq t$.

# Základní výsledky

- $rc(C_k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$
- $rc(W_n) = \begin{cases} 1 \dots n = 3 \\ 2 \dots 4 \leq n \leq 6 \\ 3 \dots n \geq 7 \end{cases}$
- $rc(K_{s,t}) = \min\{4, \lceil \sqrt[s]{t} \rceil\}$ pro $2 \leq s \leq t$.

# Základní výsledky

- $rc(C_k) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$
- $rc(W_n) = \begin{cases} 1 \ldots n = 3 \\ 2 \ldots 4 \leq n \leq 6 \\ 3 \ldots n \geq 7 \end{cases}$
- $rc(K_{s,t}) = \min\{4, \lceil \sqrt[s]{t} \rceil\}$ pro $2 \leq s \leq t$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 2$. Potom $rc(G) \leq n - 3$.

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{5}{6}n$.

**Hypotéza: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3}{4}n$.

**Theorem Schiermeyer (2009)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3n-1}{4}$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 2$. Potom $rc(G) \leq n - 3$.

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{5}{6}n$.

**Hypotéza: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3}{4}n$.

**Theorem Schiermeyer (2009)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3n-1}{4}$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 2$. Potom $rc(G) \leq n - 3$.

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{5}{6}n$.

**Hypotéza: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3}{4}n$.

**Theorem Schiermeyer (2009)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3n-1}{4}$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 2$. Potom $rc(G) \leq n - 3$.

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{5}{6}n$.

**Hypotéza: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3}{4}n$.

**Theorem Schiermeyer (2009)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a nechť $\delta(G) \geq 3$. Potom $rc(G) < \frac{3n-1}{4}$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Krivelevich, Yuster (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) < \frac{20n}{\delta(G)}$.

**Problém: Schiermeyer (2009)**

Pro každé $k \geq 2$ nalézt nejmenší konstantu $c_k$, $0 < c_k \leq 1$, tak aby $rc(G) \leq c_k\, n$ pro všechny grafy $G$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq k$. Platí, že $c_k = \frac{3}{k+1}$ pro každé $k \geq 2$?

**Věta: Chandran a spol. (2011)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$. Navíc, pro každé $\delta(G) \geq 2$ existuje nekonečně mnoho grafů, pro něž $rc(G) \geq \frac{3(n-2)}{\delta(G)+1} - 1$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Krivelevich, Yuster (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) < \frac{20n}{\delta(G)}$.

**Problém: Schiermeyer (2009)**

Pro každé $k \geq 2$ nalézt nejmenší konstantu $c_k$, $0 < c_k \leq 1$, tak aby $rc(G) \leq c_k\, n$ pro všechny grafy $G$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq k$. Platí, že $c_k = \frac{3}{k+1}$ pro každé $k \geq 2$?

**Věta: Chandran a spol. (2011)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$. Navíc, pro každé $\delta(G) \geq 2$ existuje nekonečně mnoho grafů, pro něž $rc(G) \geq \frac{3(n-2)}{\delta(G)+1} - 1$.

# Duhová souvislost a minimální stupeň

**Věta: Krivelevich, Yuster (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) < \frac{20n}{\delta(G)}$.

**Problém: Schiermeyer (2009)**

Pro každé $k \geq 2$ nalézt nejmenší konstantu $c_k$, $0 < c_k \leq 1$, tak aby $rc(G) \leq c_k\, n$ pro všechny grafy $G$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq k$. Platí, že $c_k = \frac{3}{k+1}$ pro každé $k \geq 2$?

**Věta: Chandran a spol. (2011)**

Nechť $G$ je souvislý graf řádu $n$ s minimálním stupněm $\delta(G)$. Potom $rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$. Navíc, pro každé $\delta(G) \geq 2$ existuje nekonečně mnoho grafů, pro něž $rc(G) \geq \frac{3(n-2)}{\delta(G)+1} - 1$.

# Duhová souvislost a vrcholová souvislost

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{2}{3}n$.

**Věta: Li, Shi (2011)**

Nechť $G$ je 3-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{3}{5}(n+1)$.

**Věta**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{2}{3}n$.

**Věta: Li, Shi (2011)**

Nechť $G$ je 3-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{3}{5}(n+1)$.

**Věta**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

# Duhová souvislost a vrcholová souvislost

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{2}{3}n$.

**Věta: Li, Shi (2011)**

Nechť $G$ je 3-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \frac{3}{5}(n+1)$.

**Věta**

Nechť $G$ je 2-souvislý graf řádu $n$, potom $rc(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

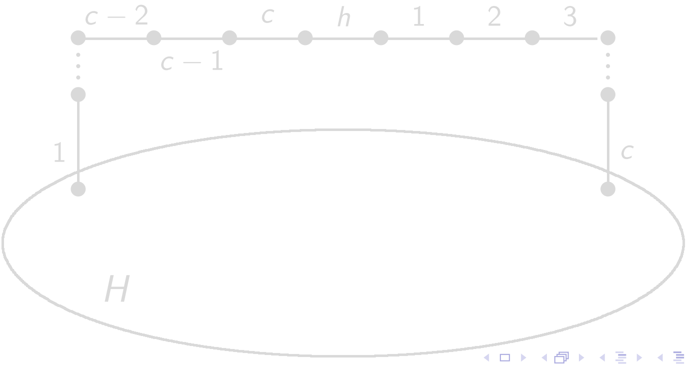
# Nástin důkazu 1

Zvolme maximální podgraf $H$ grafu $G$ s vlastností $rc(H) \leq \frac{|V(H)|}{2}$.

Prokážeme existenci takového $H$ - kružnice.

**Tvrzení 1**

V grafu $G$ neexistuje lichá $H$-cesta.



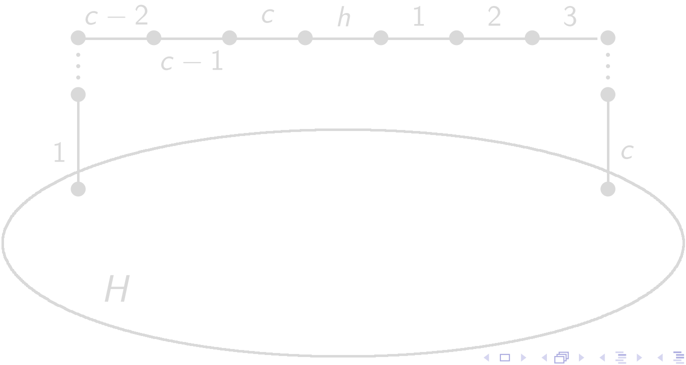
# Nástin důkazu 1

Zvolme maximální podgraf $H$ grafu $G$ s vlastností $rc(H) \leq \frac{|V(H)|}{2}$.

Prokážeme existenci takového $H$ - kružnice.

**Tvrzení 1**

V grafu $G$ neexistuje lichá $H$-cesta.



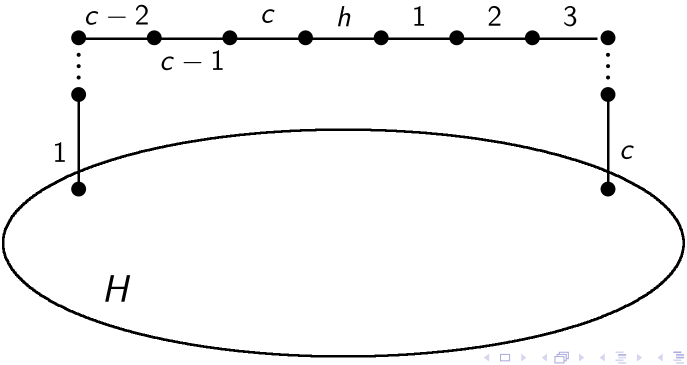
# Nástin důkazu 1

Zvolme maximální podgraf $H$ grafu $G$ s vlastností $rc(H) \leq \frac{|V(H)|}{2}$.

Prokážeme existenci takového $H$ - kružnice.

**Tvrzení 1**

V grafu $G$ neexistuje lichá $H$-cesta.



# Nástin důkazu 2

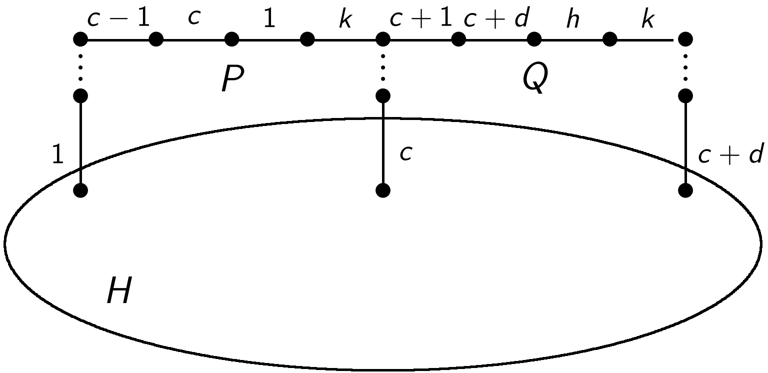
## Tvrzení 2

Nechť $P$ je sudá $H$-cesta v $G$. Potom v $G$ neexistuje žádná další $(H \cup P)$-cesta $Q$ v $G$ s alespoň jedním koncovým vrcholem na $P$.

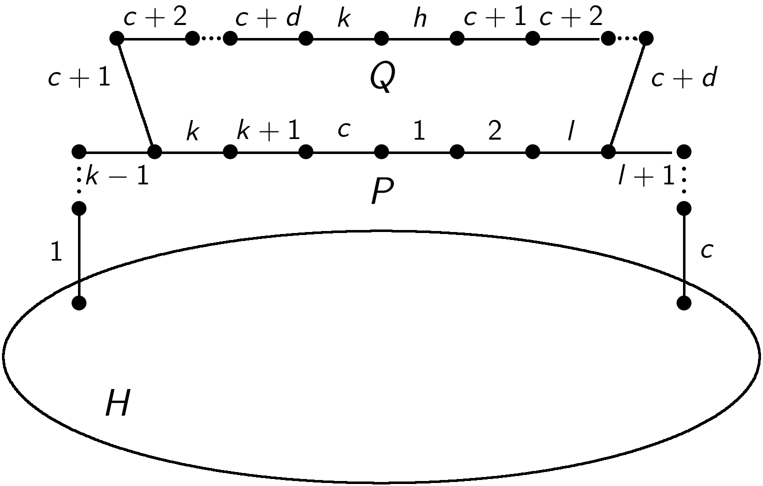
# Nástin důkazu 2

## Tvrzení 2

Nechť $P$ je sudá $H$-cesta v $G$. Potom v $G$ neexistuje žádná další $(H \cup P)$-cesta $Q$ v $G$ s alespoň jedním koncovým vrcholem na $P$.



# Nástin důkazu 3



# Nástin důkazu 4

**Definice**

Dvojici vrcholově disjunktních sudých $H$-cest $P_1$, $P_2$ nazveme *dobré*, jestliže v $G$ neexistuje žádná další $H$-cesta $Q$, která je vrcholově disjunktní s $P_i$, $i = 1, 2$.

**Tvrzení 3**

Pokud v grafu $G$ neexistují dobré $H$-cesty $P_1$, $P_2$, potom jsou v $G$ právě tři triviální sudé $H$-cesty $P_1$, $P_2$, $P_3$ takové, že $G = H \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

- vyberme $P_1$, $P_2$ tak, aby $|V(P_1) \cup V(P_2)|$ bylo maximální.

# Nástin důkazu 4

## Definice

Dvojici vrcholově disjunktních sudých $H$-cest $P_1$, $P_2$ nazveme *dobré*, jestliže v $G$ neexistuje žádná další $H$-cesta $Q$, která je vrcholově disjunktní s $P_i$, $i = 1, 2$.

## Tvrzení 3

Pokud v grafu $G$ neexistují dobré $H$-cesty $P_1$, $P_2$, potom jsou v $G$ právě tři triviální sudé $H$-cesty $P_1$, $P_2$, $P_3$ takové, že $G = H \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

- vyberme $P_1$, $P_2$ tak, aby $|V(P_1) \cup V(P_2)|$ bylo maximální.

# Nástin důkazu 4

## Definice

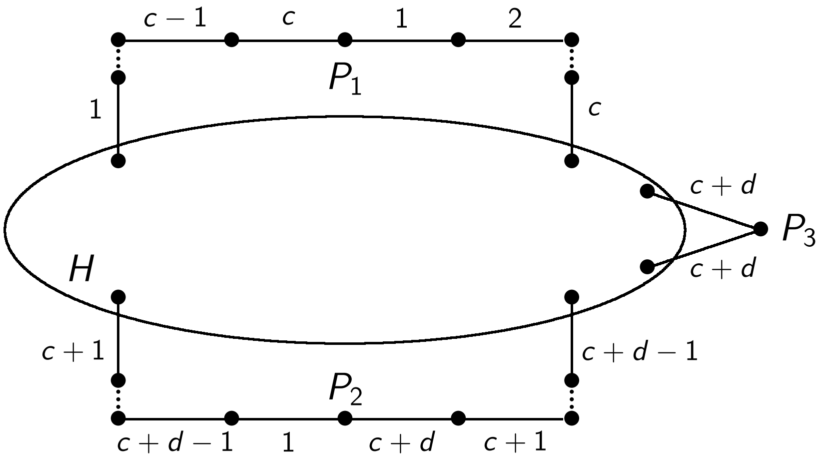
Dvojici vrcholově disjunktních sudých $H$-cest $P_1$, $P_2$ nazveme *dobré*, jestliže v $G$ neexistuje žádná další $H$-cesta $Q$, která je vrcholově disjunktní s $P_i$, $i = 1, 2$.

## Tvrzení 3

Pokud v grafu $G$ neexistují dobré $H$-cesty $P_1$, $P_2$, potom jsou v $G$ právě tři triviální sudé $H$-cesty $P_1$, $P_2$, $P_3$ takové, že $G = H \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

- vyberme $P_1$, $P_2$ tak, aby $|V(P_1) \cup V(P_2)|$ bylo maximální.

# Nástin důkazu 5



# Duhová souvislost a hranová souvislost

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ souvislý graf řádu $n$, který neobsahuje most. Potom $rc(G) \leq \frac{4}{5}n - 1$.

Pro vyšší hranovou souvislost - Věta Chandran a spol.
$rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$

# Duhová souvislost a hranová souvislost

**Věta: Caro a spol. (2008)**

Nechť $G$ souvislý graf řádu $n$, který neobsahuje most. Potom $rc(G) \leq \frac{4}{5}n - 1$.

Pro vyšší hranovou souvislost - Věta Chandran a spol.

$rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$

# Duhová souvislost a poloměr/průměr

Zřejmě, $rc(G) \geq \text{diam}(G)$. Existuje i nějaká horní mez na $rc(G)$ ve smyslu $r(G)$ nebo $\text{diam}(G)$?

**Theorem Basavaraju a spol. (2010)**

Pro každý souvislý graf bez mostů s poloměrem $r$ platí, že, $rc(G) \leq r(r+2)$. Navíc, pro každé $r \geq 1$, existuje souvislý graf bez mostů o poloměru $r$, pro nějž $rc(G) = r(r+2)$.

**Theorem Chandran a spol. (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf s $\delta(G) \geq 2$. Potom

- je-li $G$ intervalový graf, pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 1$,
- je-li $G$ cirkulant (circular arc graph), pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$,
- je-li $G$ řetězový graf (chain graph), potom $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$.

## Duhová souvislost a poloměr/průměr

Zřejmě, $rc(G) \geq \text{diam}(G)$. Existuje i nějaká horní mez na $rc(G)$ ve smyslu $r(G)$ nebo $\text{diam}(G)$?

**Theorem Basavaraju a spol. (2010)**

Pro každý souvislý graf bez mostů s poloměrem $r$ platí, že, $rc(G) \leq r(r+2)$. Navíc, pro každé $r \geq 1$, existuje souvislý graf bez mostů o poloměru $r$, pro nějž $rc(G) = r(r+2)$.

**Theorem Chandran a spol. (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf s $\delta(G) \geq 2$. Potom

- je-li $G$ intervalový graf, pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 1$,
- je-li $G$ cirkulant (circular arc graph), pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$,
- je-li $G$ řetězový graf (chain graph), potom $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$.

# Duhová souvislost a poloměr/průměr

Zřejmě, $rc(G) \geq \text{diam}(G)$. Existuje i nějaká horní mez na $rc(G)$ ve smyslu $r(G)$ nebo $\text{diam}(G)$?

**Theorem Basavaraju a spol. (2010)**

Pro každý souvislý graf bez mostů s poloměrem $r$ platí, že, $rc(G) \leq r(r+2)$. Navíc, pro každé $r \geq 1$, existuje souvislý graf bez mostů o poloměru $r$, pro nějž $rc(G) = r(r+2)$.

**Theorem Chandran a spol. (2010)**

Nechť $G$ je souvislý graf s $\delta(G) \geq 2$. Potom

- je-li $G$ intervalový graf, pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 1$,
- je-li $G$ cirkulant (circular arc graph), pak $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$,
- je-li $G$ řetězový graf (chain graph), potom $rc(G) \leq \text{diam}(G) + 4$.

# Duhová souvislost hustých grafů

## Problém

Z $rc(G) = 2$ plyne $\mathrm{diam}(G) = 2$, ale ne naopak (např. hvězda $K_{1,m}$).

Otázka: Pro libovolné $k$, $1 \leq k \leq n-1$, nalézt a minimalizovat funkci $f(n,k)$ s vlastností, že pokud $|E(G)| \geq f(n,k)$, potom $rc(G) \leq k$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,k) \geq \binom{n-k+1}{2} + (k-1)$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,1) = \binom{n}{2}$,

$f(n,n-1) = n-1$,

$f(n,n-2) = n$.

# Duhová souvislost hustých grafů

## Problém

Z $rc(G) = 2$ plyne $\mathrm{diam}(G) = 2$, ale ne naopak (např. hvězda $K_{1,m}$).

Otázka: Pro libovolné $k$, $1 \leq k \leq n-1$, nalézt a minimalizovat funkci $f(n,k)$ s vlastností, že pokud $|E(G)| \geq f(n,k)$, potom $rc(G) \leq k$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,k) \geq \binom{n-k+1}{2} + (k-1)$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,1) = \binom{n}{2}$,

$f(n,n-1) = n-1$,

$f(n,n-2) = n$.

# Duhová souvislost hustých grafů

## Problém

Z $rc(G) = 2$ plyne $\mathrm{diam}(G) = 2$, ale ne naopak (např. hvězda $K_{1,m}$).

Otázka: Pro libovolné $k$, $1 \leq k \leq n-1$, nalézt a minimalizovat funkci $f(n,k)$ s vlastností, že pokud $|E(G)| \geq f(n,k)$, potom $rc(G) \leq k$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,k) \geq \binom{n-k+1}{2} + (k-1)$.

## Tvrzení: Schiermeyer (2009)

$f(n,1) = \binom{n}{2}$,

$f(n,n-1) = n-1$,

$f(n,n-2) = n$.

# Duhová souvislost hustých grafů

**Věta: Schiermeyer (2009)**

Něchť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a velikosti $m$. Je-li $\binom{n-1}{2} + 1 \leq m \leq \binom{n}{2} - 1$, potom $rc(G) = 2$.

**Důsledek**

$f(n,2) = \binom{n-1}{2} + 1.$

**Věta: Schiermeyer (2009)**

Nechť $G$ je graf řádu $n$, s průměrem 2 a klikovostí $n-2$. Potom $rc(G) = 2$ kromě grafu $G_1$, který sestává z $K_{n-2}$ a dvou volných hran vycházejících ze stejného vrcholu kliky.

# Duhová souvislost hustých grafů

## Věta: Schiermeyer (2009)

Něchť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a velikosti $m$. Je-li $\binom{n-1}{2} + 1 \leq m \leq \binom{n}{2} - 1$, potom $rc(G) = 2$.

## Důsledek

$f(n,2) = \binom{n-1}{2} + 1$.

## Věta: Schiermeyer (2009)

Nechť $G$ je graf řádu $n$, s průměrem 2 a klikovostí $n-2$. Potom $rc(G) = 2$ kromě grafu $G_1$, který sestává z $K_{n-2}$ a dvou volných hran vycházejících ze stejného vrcholu kliky.

# Duhová souvislost hustých grafů

### Věta: Schiermeyer (2009)

Něchť $G$ je souvislý graf řádu $n$ a velikosti $m$. Je-li $\binom{n-1}{2} + 1 \le m \le \binom{n}{2} - 1$, potom $rc(G) = 2$.

### Důsledek

$f(n,2) = \binom{n-1}{2} + 1$.

### Věta: Schiermeyer (2009)

Nechť $G$ je graf řádu $n$, s průměrem 2 a klikovostí $n-2$. Potom $rc(G) = 2$ kromě grafu $G_1$, který sestává z $K_{n-2}$ a dvou volných hran vycházejících ze stejného vrcholu kliky.

# Další výsledky pro duhovou souvislost

- pro Cayleyho grafy (Li, Li, Liu),
- pro klece (Chartrand a spol.),
- pro kubické grafy malého řádu (Johns a spol.)

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

# Některé další otevřené problémy

- určit vztah mezi $rc(G)$ a $rc(L(G))$,
- nalézt konstantu či funkci pro $rc(L^k(G))$ (je známo $rc(L^2(G)) \leq |E(G)| - m_1$, kde $m_1$ je počet volných cest délky dva),
- určit $rc(G)$ pro silně regulární grafy (je známo $\mathrm{diam}(G) = 2$, $rc(G) \leq 5$ s výjimkou hvězd),
- jaké $\delta(G)$ (ve vztahu k řádu grafu) zaručuje $rc(G) = 2$,
- určení nejmenší konstanty $c$ takové, že každý graf $G$, který je bez mostů, s $\mathrm{diam}(G) = 2$ má $rc(G) \leq c$,
- charakterizovat všechny grafy s $rc(G) = \mathrm{diam}(G)$ (např. jednotkově intervalové grafy), nebo alespoň nalézt nějaké postačující podmínky pro tuto rovnost.

Děkuji za pozornost!