

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

DiMaS, VŠB-TU Ostrava, 19. listopadu 2012



D. Lukáš



Katedra aplikované matematiky, IT pro inovace
VŠB-TU Ostrava

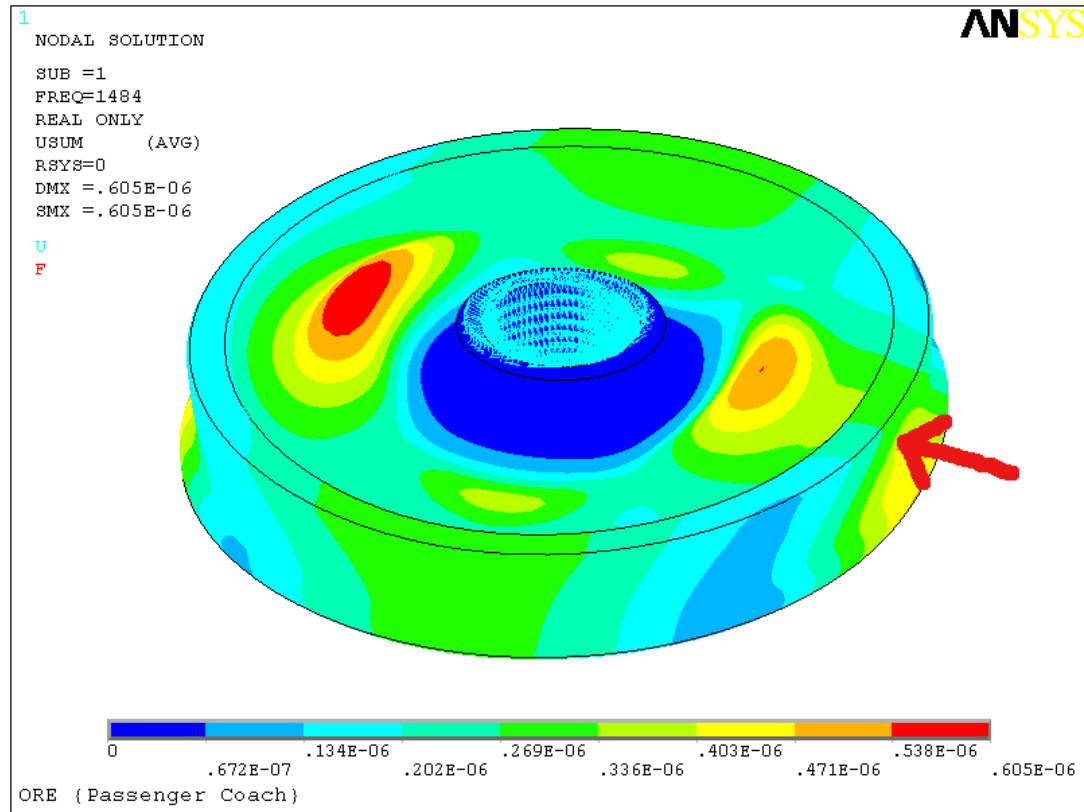
email: dalibor.lukas@vsb.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Svět vědy CZ 1.07/2.3.00/35.0018

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

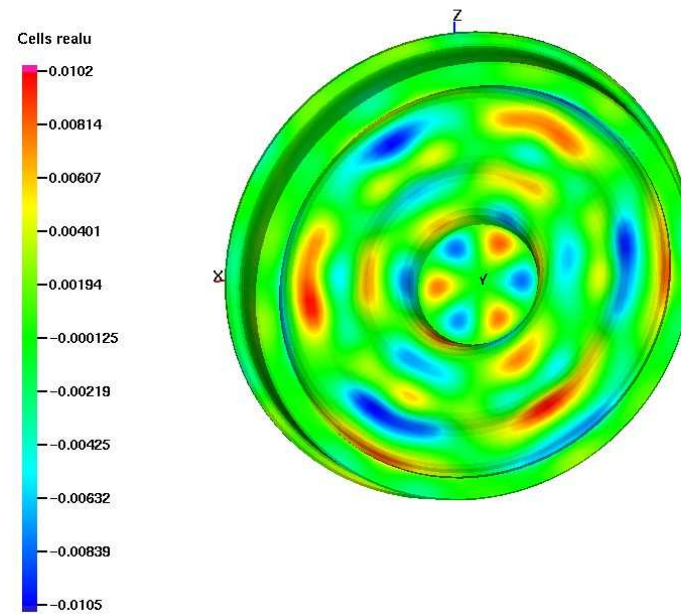
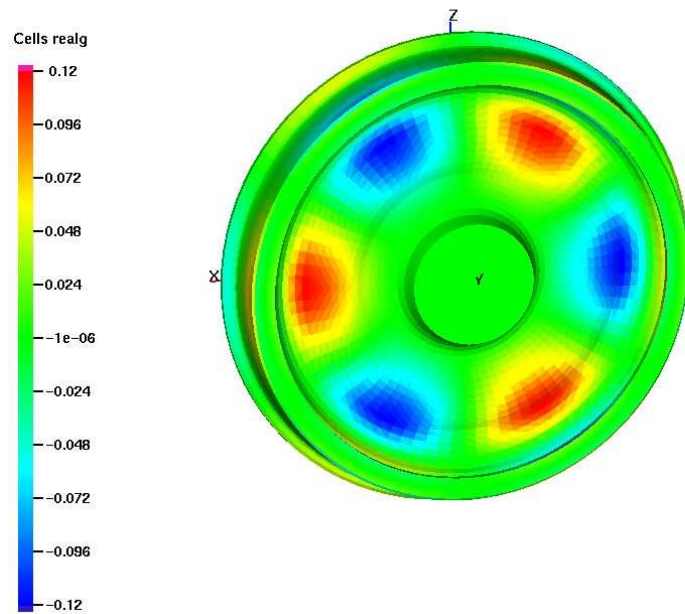
Motivace: akustika železničního kola



Spolupráce s doc. Szwedou, Katedra mechaniky, VŠB–TU Ostrava

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

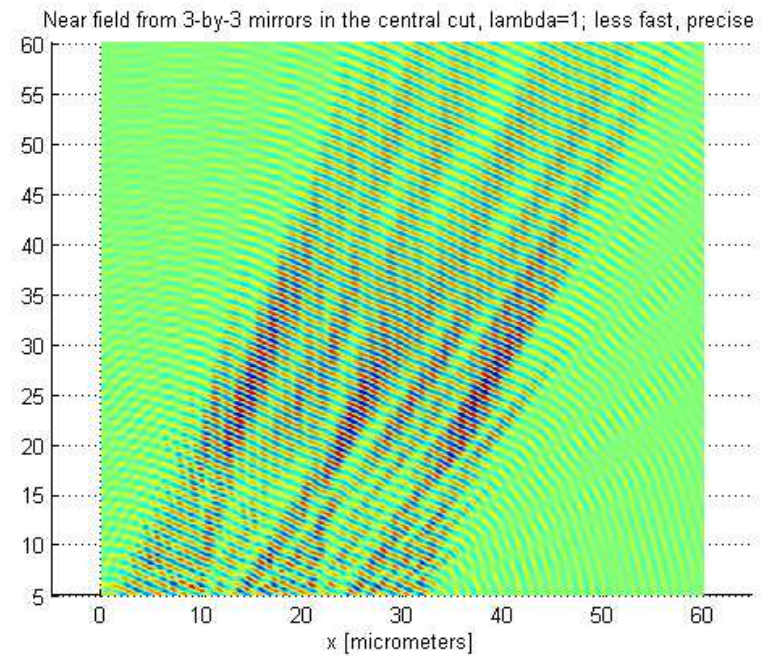
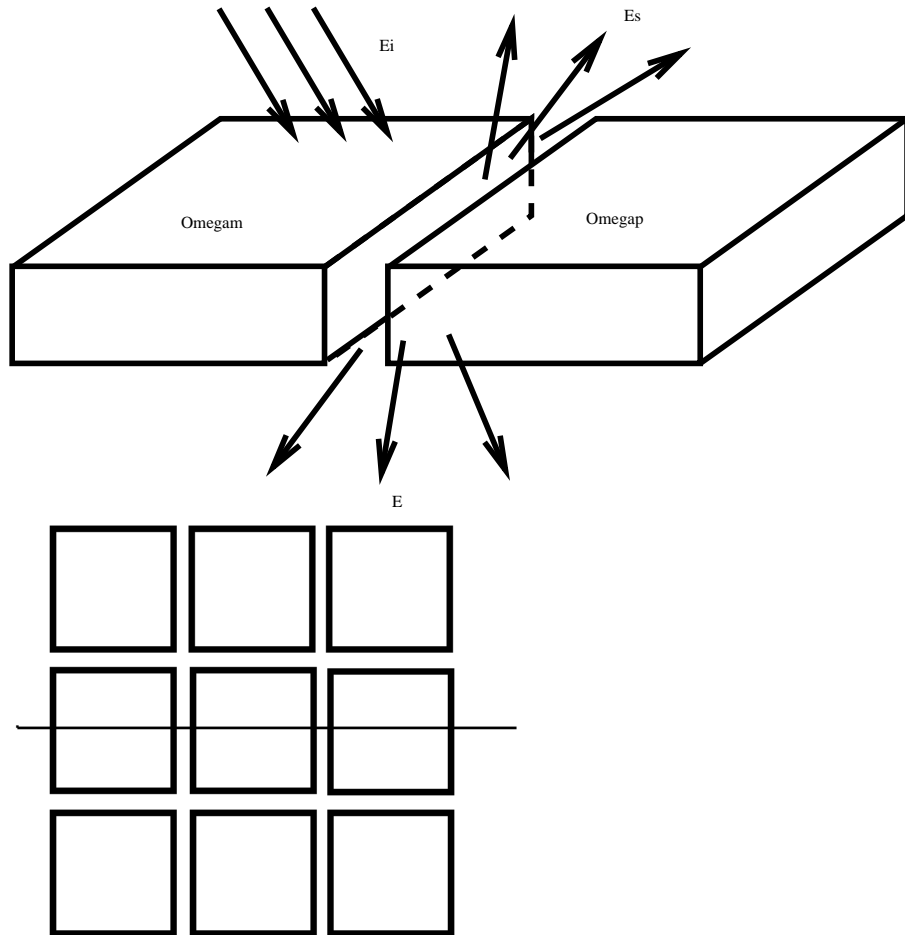
Motivace: akustika železničního kola



Spolupráce s doc. Szwedou, Katedra mechaniky, VŠB–TU Ostrava

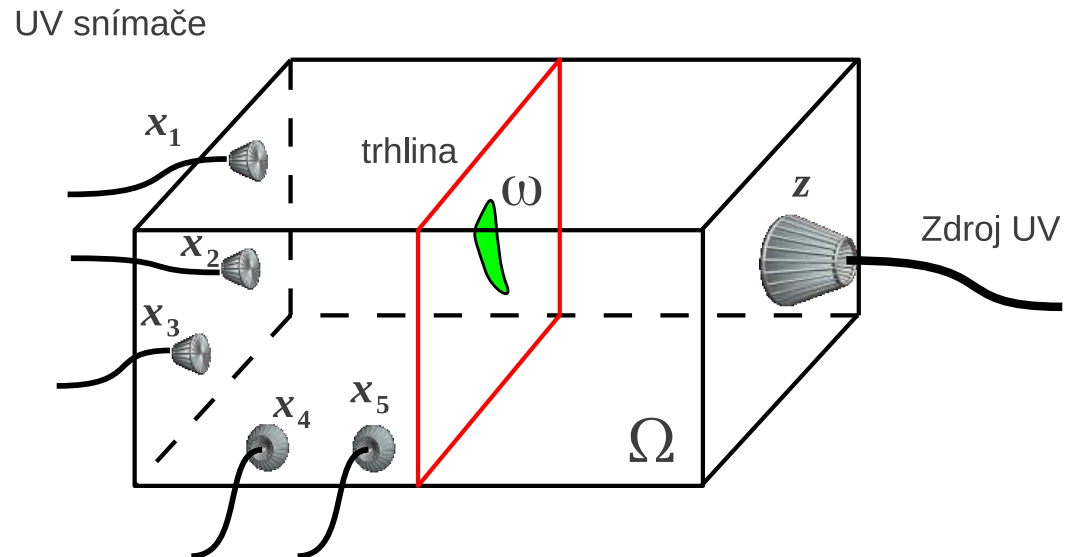
Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Motivace: použití infračerveného světla v digitálním projektoru



Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

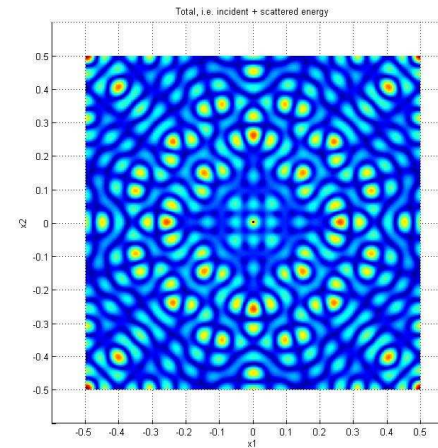
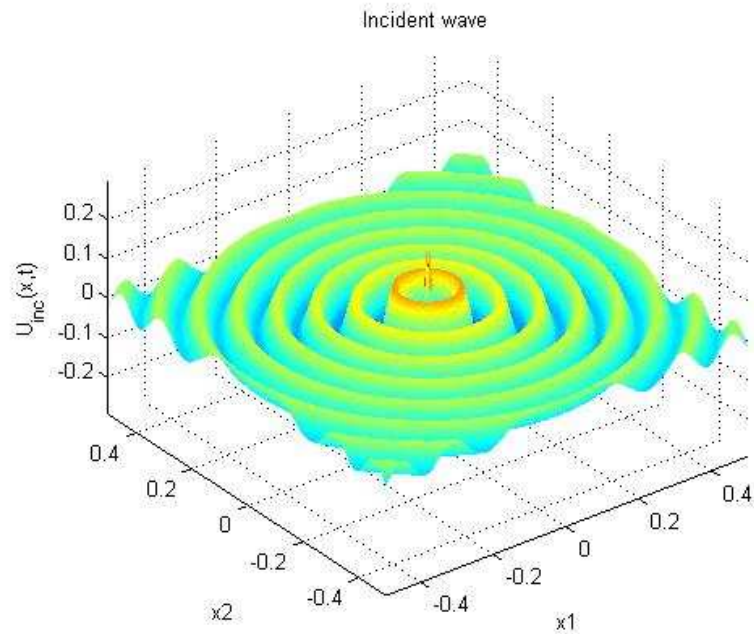
Motivace: UV defektoskopie v leteckém průmyslu



Spolupráce s firmou Honeywell.

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Motivace: UV defektoskopie v leteckém průmyslu



Spolupráce s firmou Honeywell.

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Osnova

- Princip BEM
- Zřed'ování BEM matic
- Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

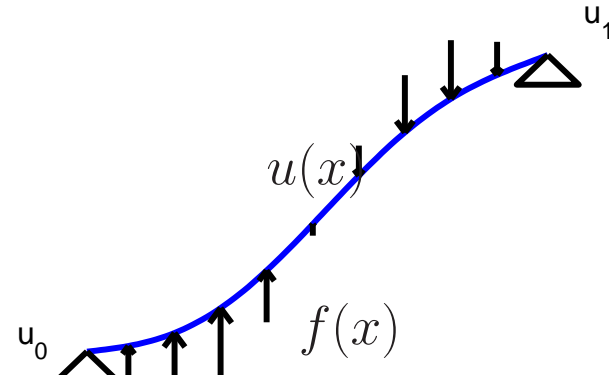
Osnova

- Princip BEM
- Zřed'ování BEM matic
- Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Princip BEM

Ilustrace BEM v 1d

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases}$$

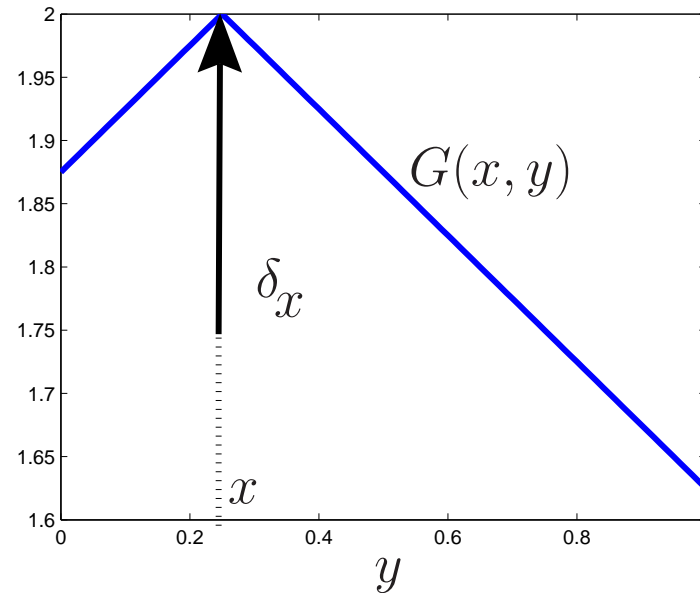


Věta o reprezentaci (o 3 potenciálech).

Pro $f \in L^2(\Omega)$, $x \in (0, 1)$:

$$u(x) = \int_0^1 f(y) G(x, y) dy +$$

$$[u(y) G'_y(x, y)]_{y=0}^{y=1} - [u'(y) G(x, y)]_{y=0}^{y=1}.$$



Princip BEM

BEM ve 3d

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \Gamma := \partial\Omega \end{cases}$$

Fundamentální řešení:

$$G(x, y) := \frac{1}{4\pi \|x - y\|}.$$

Věta o reprezentaci. Pro oblast Ω s lipschitzovskou hranicí, $f \in L^2(\Omega)$, $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy + \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x, y) dS(y) - \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n(y)}(y)}_{=:t(y)} G(x, y) dS(y).$$

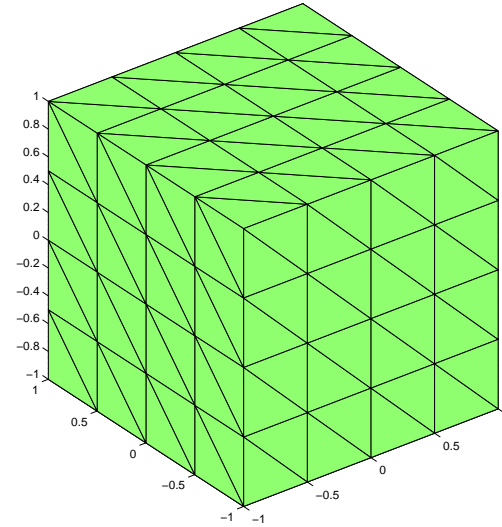
Hraniční integrální rovnice: Hledáme $t(y) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in \Gamma$:

$$\int_{\Gamma} t(y) G(x, y) dS(y) = \int_{\Gamma} f(y) G(x, y) dy + \frac{1}{2}g(x) \int_{\Gamma} g(y) \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x, y) dS(y).$$

Princip BEM

BEM ve 3d

Triangulace Γ do n trojúhelníků,
 $t(y)$ po trojúhelnících konstantní
 $\rightsquigarrow \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.



Galerkinova aproximace vede na soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{V} \mathbf{t} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je hustá matice s prvky $(\mathbf{V})_{ij} = \int_{T_i} \int_{T_j} \frac{1}{4\pi \|x-y\|} dS(y) dS(x)$.

CPU, Mem = $O(n^2)$

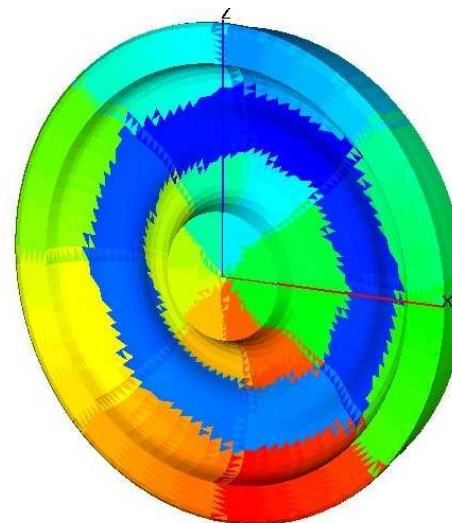
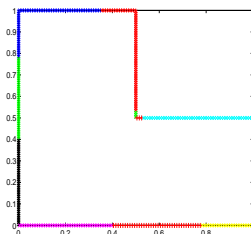
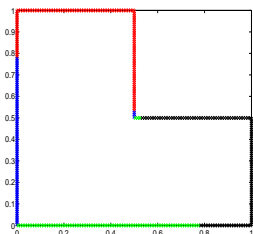
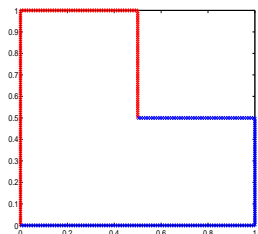
Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Osnova

- Princip BEM
- Zřetřování BEM matic
- Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Zředování BEM matic

Geometrická bisekce



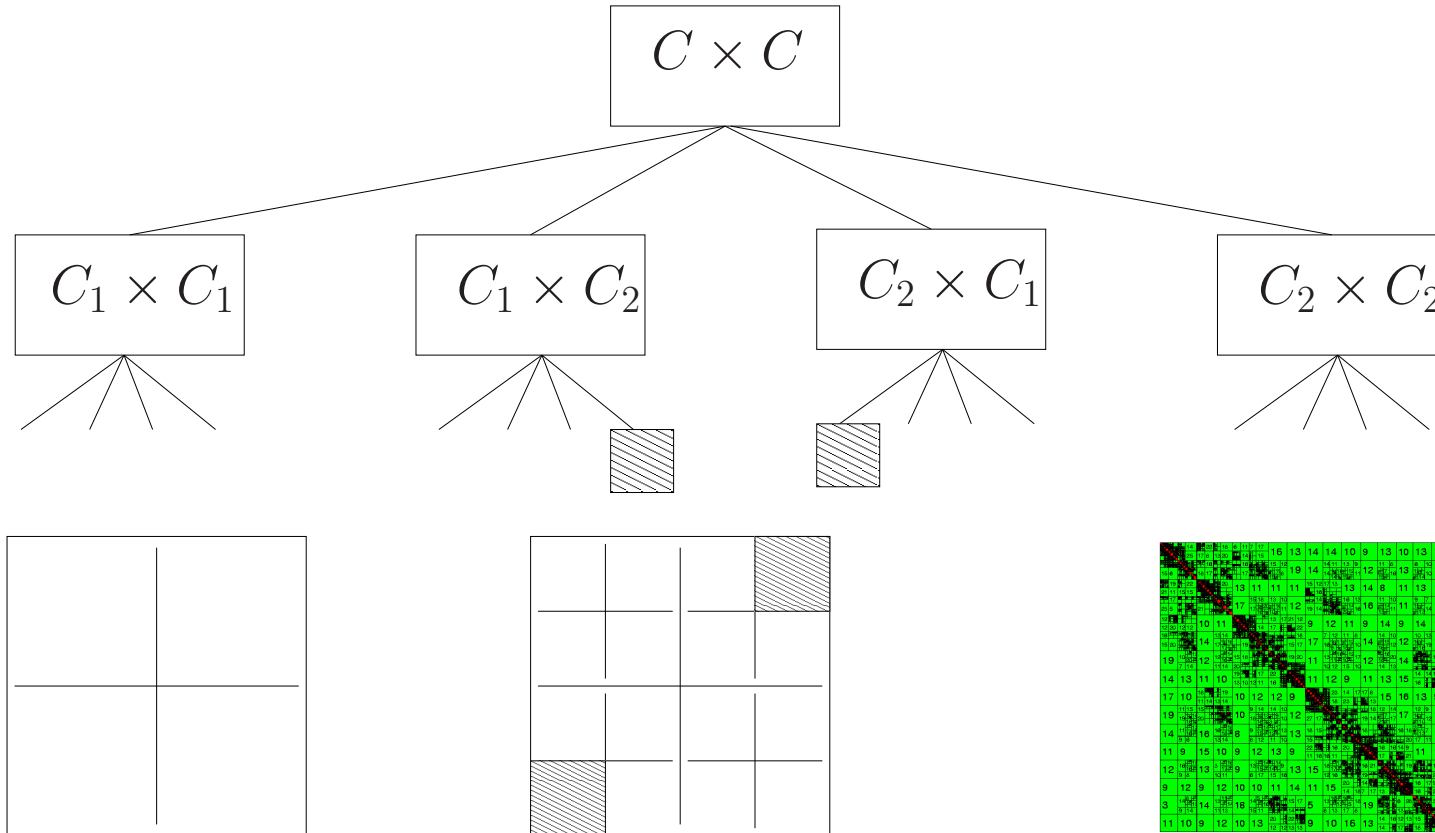
Dvojice vzdálených klastrů

$$\begin{aligned} \min\{\text{diam } C_x, \text{diam } C_y\} &\leq \\ 2 \min\{\text{rad } C_x, \text{rad } C_y\} &\leq \eta (|\mathbf{x}^{C_x} - \mathbf{x}^{C_y}| - \text{rad } C_x - \text{rad } C_y) \\ &\leq \eta \text{dist}(C_x, C_y), \end{aligned}$$

kde $\eta \in (0, 1)$, \mathbf{x}^C je těžiště C , $\text{rad } C := \max_k |\mathbf{x}_k^C - \mathbf{x}^C|$.

Zředování BEM matic

Strom dvojic klastrů, hierarchické matice \rightsquigarrow CPU, Mem = $O(n \log n)$



Bloky odpovídající interakci vzdálených klastrů se aproximují maticí nízké hodnosti.

Zředování BEM matic

Adaptive cross approximation (ACA): příklad ($\mathbf{R}_0 := \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_0 &= \begin{pmatrix} 0.431 & 0.354 & 0.582 & 0.417 \\ 0.491 & 0.396 & 0.674 & 0.449 \\ 0.446 & 0.358 & 0.583 & 0.413 \\ 0.380 & 0.328 & 0.557 & 0.372 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{i_1=1, j_1=3 \\ R=\{1\}}]{} \frac{1}{0.582} \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.674 \\ 0.583 \\ 0.557 \end{pmatrix} (0.431, 0.354, 0.582, 0.417) \\
 \mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.008 & -0.014 & 0 & -0.034 \\ 0.014 & 0.003 & 0 & -0.005 \\ -0.033 & -0.011 & 0 & -0.027 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{i_1=2, j_1=4 \\ R=\{1,2\}}]{} \frac{1}{-0.034} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.034 \\ -0.005 \\ -0.027 \end{pmatrix} (-0.008, -0.014, 0, -0.034) \\
 \mathbf{R}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.005 & 0 & 0 \\ -0.026 & 0.0004 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{i_1=4, j_1=1 \\ R=\{1,2,4\}}]{} \frac{1}{-0.026} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.015 \\ -0.026 \end{pmatrix} (-0.026, 0.0004, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Pokles relativní chyby: $\|\mathbf{R}_k\|_2 / \|\mathbf{A}\|_2 = 0.030, 0.016, 0.003$ pro $k = 1, 2, 3$.

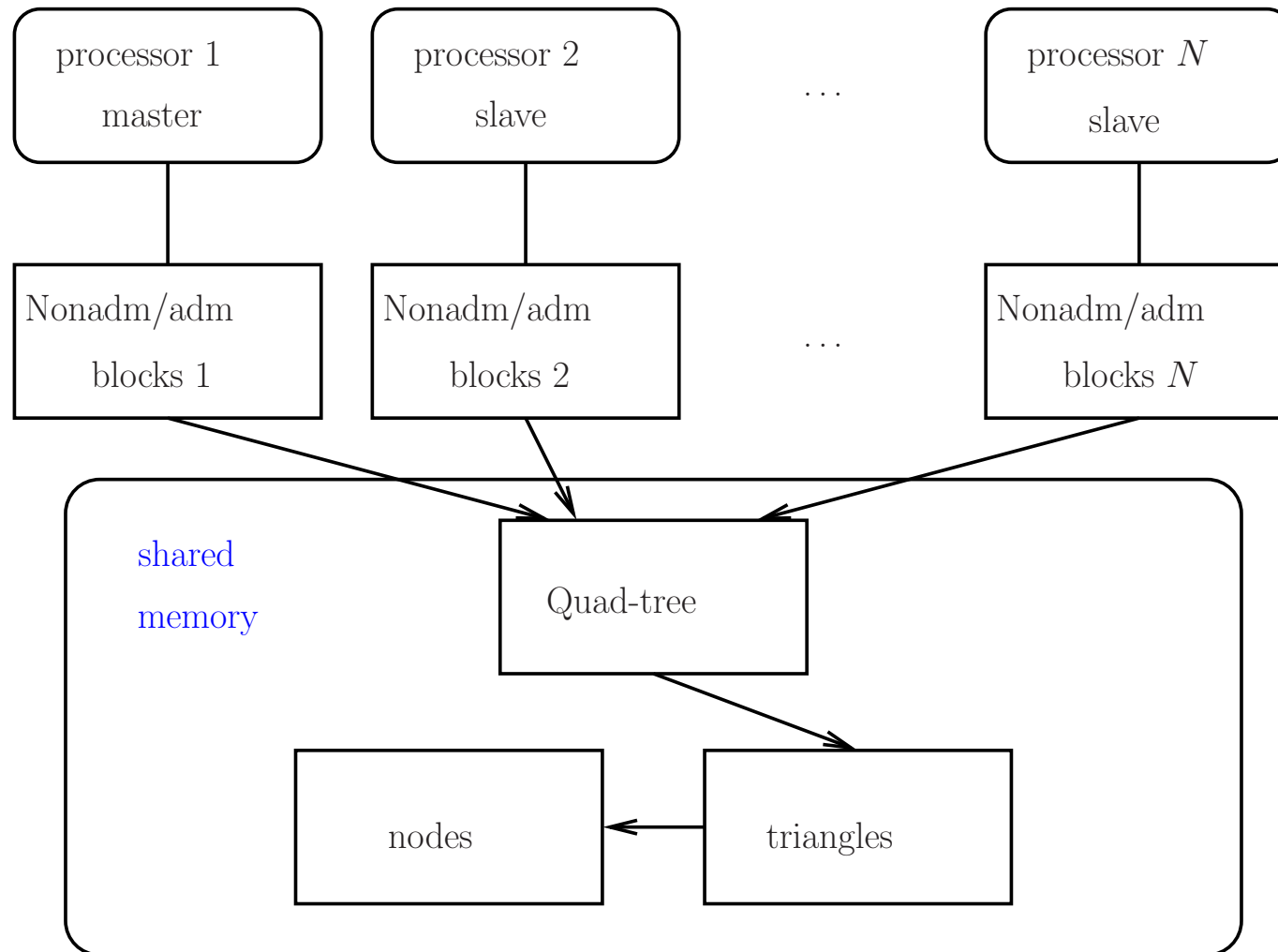
Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Osnova

- Princip BEM
- Zřed'ování BEM matic
- Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Paralelní BEM na počítačích se sdílenou pamětí



Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Helmholtz, Dirich. $u(\mathbf{x}) := e^{i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s|}/(4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s|)$, $\kappa := 2.8$, $\mathbf{x}_s := (2, 2, 2)$ on \mathcal{B}_1

n	chyba	kompr. \mathbf{V}_κ	časy plánování+sestavení \mathbf{V}_κ [s]				
			$N := 2$	$N := 4$	$N := 8$	$N := 16$	$N := 32$
40	3.3e-1	100%	0+0	0+0	0+0	0+0	0+0
160	1.2e-1	100%	0+1	0+1	0+1	0+1	0+1
640	3.6e-2	100%	0+10	0+4	0+3	0+2	0+2
2560	9.9e-3	100%	0+142	0+72	0+38	0+20	0+9
10240	2.8e-3	65%	66+1388	27+673	7+335	7+168	5+88
40960	9.0e-4	26%			452+3600	280+1823	233+929
163840	3.3e-4	8%					4011+19892

$$chyba := \frac{\sqrt{\langle M(u - u_h), u - u_h \rangle_\Gamma}}{\sqrt{\langle Mu, u \rangle_\Gamma}}$$

CPU se škáluje $CPU = O\left(\frac{n \log n}{N}\right)$, ale paměť ne: $Mem = O(N n \log n)$.

Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

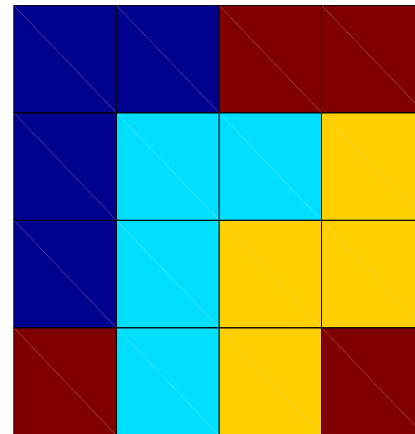
The idea

N processes, $N \times N$ submatrices

- Each diagonal block with the related geometry data assigned to one process
⇒ both memory and CPU balanced, since most nonadmissible blocks are distributed efficiently.
- Each geometrically closely related $N-1$ off-diagonal blocks assigned to one process

? memory balanced: $Mem = O\left(\frac{n \log n}{N} + \frac{n}{\sqrt{N}}\right)$

? CPU balanced



Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Finding optimal distributions by brute force fails

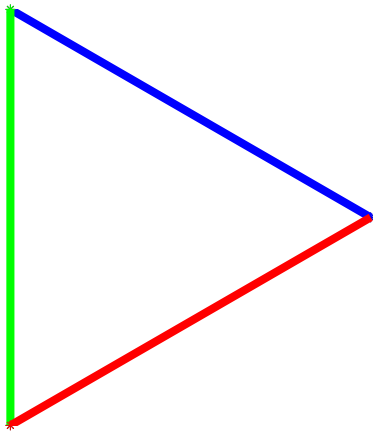
- $N = 2$: 2 cases,
- $N = 4$: 34650 cases,
- $N = 8$: $4 \cdot 10^{42}$ cases.

$$\text{number of cases} = \binom{(N-1)N}{N} \cdot \binom{(N-2)N}{N} \cdots \binom{2N}{N}$$

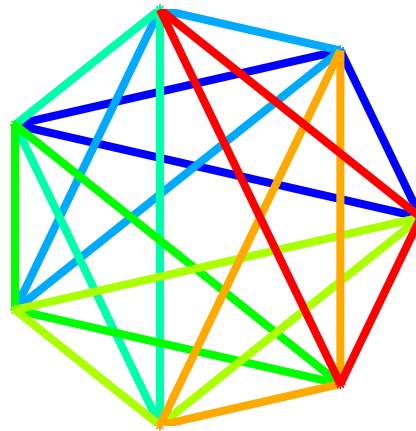
Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Cyclic decomposition of undirected graphs

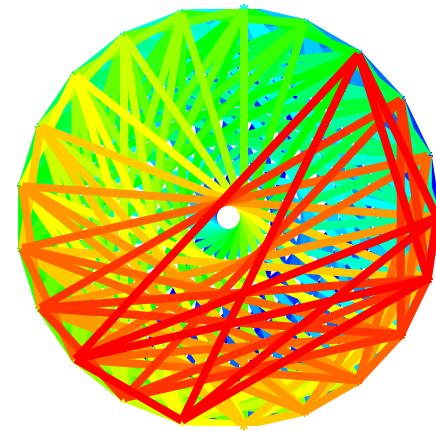
$N := 3$



$N := 7$



$N := 21$



It is equivalent to [perfect difference sets \[Singer, 1934\]](#): decompositions available for

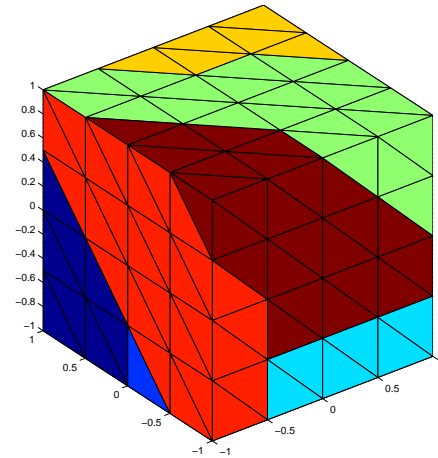
$$\frac{N(N-1)}{2N} = \frac{p(p-1)}{2},$$

where $p + 1$ is a power of a prime number.

Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

The algorithm

1. Decomposition of the mesh into N submeshes (by Metis).



2. Assignment of $O(\sqrt{N})$ submeshes to each processor, using the cyclic decomposition.
3. Parallel assembling of the $N \times N$ block matrix by means of a fast BEM.

Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

ACA for Laplace 1-layer matrix on a cube

n	compr. \mathbf{V}	average memory [MB], CPU [s] per process						
		$N := 1$	$N := 7$	$N := 31$	$N := 57$	$N := 73$	$N := 91$	$N := 133$
3072	21.5%	160, 8	148, 1	170, 0	194, 0	177, 0	197, 0	?, 0
12288	13.1%	267, 59	163, 7	175, 1	176, 1	167, 1	200, 1	207, 1
49152	5.2%	884, 367	263, 51	201, 10	194, 8	195, 6	214, 5	220, 4
196608	1.8%		705, 226	353, 53	274, 32	254, 25	280, 25	276, 18
786432	0.7%			999, 294	668, 172	599, 119	570, 110	535, 99
3145728	0.3%							1911 MB, 596 s

ACA: $\eta := 1.1$, $\varepsilon := 10^{-4}, \dots, 10^{-9}$, $n_{\min} := 10, \dots, 60$

Parallel scalability: $CPU = O\left(\frac{n \log n}{N}\right)$, $Mem = O\left(\frac{n \log n}{N} + \frac{n}{\sqrt{N}}\right)$.

Paralelizace pomocí cyklické dekompozice grafů

Int. Laplace problem with Dir. datum $u(\mathbf{x}) := 1/|\mathbf{x} - (2, 2, 2)|$ on $\Omega := (0, 1)^3$

#elems error, #CG	assemble time: CPU(\mathbf{V})/CPU(\mathbf{K}) [s]				
	memory [MB] per process: compression of \mathbf{V} /compression of \mathbf{K} [%]				
	$N := 7$	$N := 31$	$N := 57$	$N := 73$	$N := 133$
3072	114:2/84	42:2/24	24:0/21	20:1/17	
2.6e-2, 59	159:41/84	173:40/93	176:42/99	192:46/100	
12288	545:11/396	153:2/81	95:0/54	77:2/75	47:0/30
1.3e-2, 78	247:19/41	213:19/45	210:18/49	206:20/53	202:23/67
49152	2752:69/2209	819:13/474	601:6/280	446:8/292	241:7/176
6.5e-3, 102	803:8/16	347:8/17	291:8/19	277:8/20	258:9/25
196608		3171:83/2521	2122:45/1282	1885:39/1348	1016:31/790
3.3e-3, 129		1025:3/6	717:3/7	646:3/7	529:3/8
786432					4247 s:161/4085
1.7e-3, 167					1885 MB:1/3

Paralelní BEM pomocí cyklické dekompozice grafů

Závěr

- paralelní ACA BEM pro počítače s distribuovanou pamětí

Plány

- s M. Kravčenkem: (sub)optimální necyklické dekompozice grafů
- s M. Mertou: paralelní FMM BEM
- s L. Malým: primární DD metody založené na BEM
- s M. Mertou: BEM pro vlnovou rovnici